Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

11.03.2006.

8. РАЗРЕД

1. Ако су x и a реални бројеви такви да важи $x + \frac{1}{x} = a$, изразити $x^4 + \frac{1}{x^4}$ у функцији од a.
2. Одредити цифре x, y и z такве да је $\frac{1}{x+y+z} = \overline{0,xyz}$. Наћи сва решења.
3. Дужине катета правоуглог троугла ABC су a и b. Симетрала правог угла код темена C сече хипотенузу у тачки D. Израчунати дужину дужи CD.
4. Одредити све реалне бројеве a за које једначина $|x-1| + |x-2| = a$ има бесконачно много решења.
5. Одредити запремину квадра код кога су растојања од тачке пресека дијагонала до ивица једнака 7 cm, 8 cm и 9 cm.

Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

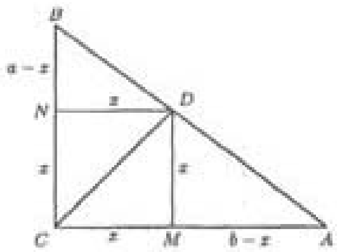
8. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

1. Како је $(x + \frac{1}{x})^2 = a^2$, следи да је $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$. (10 бодова) Даље је $(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 = (a^2 - 2)^2$, па је $x^4 + \frac{1}{x^4} = (a^2 - 2)^2 - 2$, тј. $x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 - 4a^2 + 2$. (10 бодова)

2. Множењем почетне једнакости са $1000(x + y + z)$ добијамо да је $1000 = \overline{xyz} \cdot (x + y + z)$. Како је $x + y + z \leq 27$, могућа су следећа представљања броја 1000 као производа два броја: $500 \cdot 2$, $250 \cdot 4$, $200 \cdot 5$, $125 \cdot 8$, $100 \cdot 10$, $50 \cdot 20$ и $40 \cdot 25$. Провером налазимо да је једино решење задатка: $x = 1$, $y = 2$, $z = 5$. (20 бодова; решење без образложења 5 бодова)

3. Обележимо са M и N подножја нормала из тачке D на катете AC и BC. Како дуж CD полови прав угао ACB, следи да су троуглови CMD и CND једнакокрако правоугли, па је четвороугао $MDNC$ квадрат. (5 бодова) Обележимо дужину његове странице са x. Како је површина троугла ABC једнака збиру површина троуглова CDB и ADC, добијамо да је $\frac{ab}{2} = \frac{ax}{2} + \frac{bx}{2}$. Одатле следи да је $x = \frac{ab}{a+b}$. (10 бодова) Како је CD дијагонала квадрата $MDNC$, то је њена дужина $x\sqrt{2}$, тј. $\frac{ab}{a+b}\sqrt{2}$. (5 бодова)



4. За $x < 1$ дата једначина је еквивалентна са $1 - x + 2 - x = a$. Следи да је $x = \frac{3-a}{2}$, па једначина има највише једно решење без обзира на a. (5 бодова) Слично, за $x \geq 2$ дата једначина је еквивалентна са $x - 1 + x - 2 = a$, па је $x = \frac{a+3}{2}$. Опет, без обзира на a једначина има највише једно решење. (5 бодова) За $1 \leq x < 2$ дата једначина је еквивалентна са $x - 1 + 2 - x = a$, односно са $a = 1$, па ако је $a \neq 1$ нема решења, а ако је $a = 1$ има бесконачно много решења. На основу сва три случаја закључујемо да дата једначина за $a \neq 1$ има највише два решења, док за $a = 1$ има бесконачно много решења. (10 бодова)

5. Растојања од пресека дијагонала до ивица квадра једнака су половинама дужина дијагонала страна квадра. Означимо дужине ивица квадра са a, b и c (у cm) тако да је $a^2 + b^2 = 14^2$, $b^2 + c^2 = 16^2$ и $a^2 + c^2 = 18^2$. (10 бодова) Из прве две једнакости добијамо да је $a^2 + c^2 + 2b^2 = 14^2 + 16^2 = 452$, па користећи и трећу једнакост израчунавамо да је $2b^2 = 452 - 18^2$. Следи да је $b^2 = 64$. Даље се лако добија да је $a^2 = 132$ и $c^2 = 192$, па је $a = 2\sqrt{33}$, $b = 8$ и $c = 8\sqrt{3}$. Запремина квадра (у cm^3) је $V = abc = 384\sqrt{11}$. (10 бодова)